MODELARE BAZATĂ PE ECUAŢII

ECUAŢII CU DIFERENŢE DE ORDINUL 1

Forma generală a unei ecuaţii cu diferenţe de ordinul 1 este următoarea:

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + g$$

unde:

- t – timpul care a trecut de la începutul procesului dinamic pe care-l studiem;
- Y_t – valoarea varabilei de ieşire (variabila studiată) la momentul t;
- Y_{t-1} – valoarea varabilei de ieşire la momentul t-1;
- α - un parametru al ecuaţiei, $\alpha \in R$.
- g – termenul ecuaţiei ce înglobează acele variabile care afectează valoarea curentă a lui *Y*, altele decât propria lui valoare întârziată (Y_{t-1}); g poate fi o constantă sau o variabilă ce ia diferite valori în timp;

Dacă $g \neq 0$ ecuaţia este neomogenă. Dacă $g = 0$ ecuaţia este omogenă şi va avea forma: $Y_t = \alpha Y_{t-1}$.

Soluţia ecuaţiei se va compune din soluţia părţii omogene şi o soluţie particulară.

Soluţia părţii omogene va fi de forma: $Y_t = A\tau^t$, unde:

- τ - reprezintă rădăcina ecuaţiei cu diferenţe;
- A – reprezintă o constantă nenulă a cărei valoare se poate determina din informaţiile date, cu ajutorul valorii variabilei de ieşire la momentul iniţial, *t=0*.

În aplicaţiile economice, soluţia particulară este soluţia de echilibru ce se determină din relaţia: $Y^* = Y_t = Y_{t-1}$

Soluţia ecuaţiei va fi de forma: $\boldsymbol{Y_t = A\tau^t + Y^*}$

Studiu de caz. Capitalizarea unei sume de bani fără depozit suplimentar

Dacă suma de bani R (capitalul), este capitalizată lunar la o rată a anuală a dobânzii *r* pentru un număr de luni *t*, atunci se pune problema determinării capitalului (plăţii totale) după t luni.

Caz numeric:

R_0 = 1000 (euro) – capitalul iniţial, la momentul zero;

r =0,03 (3%) – rata lunară a dobânzii.

Cerinţe:

a) Care este ecuaţia cu diferenţe de ordinul *1* în R_t?
b) Rezolvaţi ecuaţia de la *a)* şi ajungeţi la relaţia de calcul a variabilei capital in funcţie de capitalul iniţial şi de rata anuală a dobânzii (*traiectoria de evoluţie*).
c) Calculaţi valorile R_1, R_2, R_3.
d) Interpretaţi traiectoria de evoluţie a capitalului R_t.
e) Considerând D_t dobânda până în anul t ca fiind diferența între valoarea capitalului la momentul t și valoarea inițială a capitalului, care este traiectoria de evoluţie a dobânzii?
f) Rezolvaţi studiul de caz în programul *Ms Excel (*calculaţi valorile R_1 , R_2, R_3, R_4.... R_{15} , realizaţi un grafic cu traiectoria de evoluţie a lui R_t, interpretaţi).

Rezolvări:

a) Ecuaţia cu diferenţe de ordinul 1 ce trebuie rezolvată este:

$$R_t = R_{t-1} + rR_{t-1} = (1+r)R_{t-1}$$ sau

$$R_t - (1+r)R_{t-1} = 0 \qquad (1.1)$$

b) Se observă că avem de rezolvat o ecuaţie omogenă cu diferenţe de ordinul 1, termenul ecuaţiei ce înglobează acele variabile care afectează valoarea curentă a capitalului *R*, altele decât propria lui valoare întârziată fiind 0 ($g = 0$).

Soluţia ecuaţiei va fi de forma:

$$R_t = A\tau^t \qquad (1.2)$$

unde:

- τ - reprezintă rădăcina ecuaţiei cu diferenţe;
- A – reprezintă o constantă nenulă a cărei valoare se poate determina cu ajutorul valorii capitalului la momentul initial.

Din (1.1), (1.2) $\Rightarrow$ $A\tau^t - (1+r)A\tau^{t-1} = 0$

$\Rightarrow$ $A\tau^{t-1}(\tau - 1 - r) = 0 \qquad \Rightarrow \tau = 1 + r \qquad (1.3)$

întrucât *A* nenul, τ nenul (altfel R_t= 0).

Rădăcina ecuaţiei cu diferenţe a fost determinată in funcţie de rata a lunară a dobânzii *r,* prin relaţia (1.3).

Pentru determinarea constantei A, în (1.2) pentru t=0 $\Rightarrow R_0 = A\tau^0 \quad \Rightarrow \quad A = R_0$

Atunci soluţia căutată a ecuaţiei cu diferenţe este: $R_t = A\tau^t = R_0(1+r)^t$ (1.4)

c) $R_1 = 1000(1+0{,}03)^{\,1} = 1\,030$ (euro)
$R_2 = 1000(1+0{,}03)^{\,2} = 1\,060{,}9$ (euro)
$R_3 = 1000(1+0{,}03)^{\,3} = 1\,092{,}7$ (euro)

d) Din (1.3) $\Rightarrow \lambda = 1 + r = 1{,}03$

Valoarea rădăcinii caracteristice este mai mare strict decat 1 ⇒ ne aflăm in cazul τ >1, traiectoria capitalului va fi de tip **monotonă explozivă,** valorile cresc odată cu trecerea timpului şi converg spre plus infinit**.**

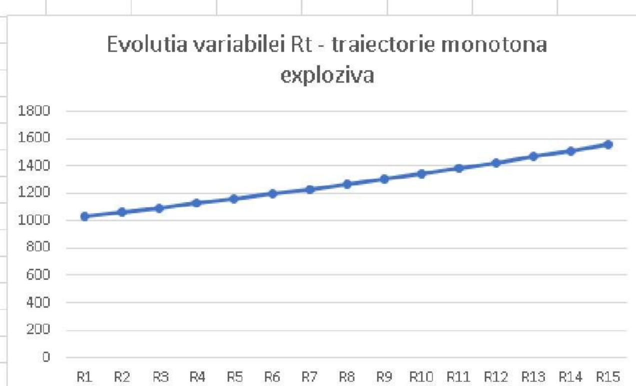
e) Dobânda pâna în luna t ca este diferența între valoarea capitalului la momentul t și valoarea inițială a capitalului: $D_t = R_t - R_0$

Din (1.4) ⇒ traiectoria de evoluţie a dobânzii este:

$$D_t = R_t - R_0 = R_0(1+r)^t - R_0 = R_0((1+r)^t\text{-}1)$$

f) Traiectoria de evoluţie a lui R_t aplicată în programul Ms Excel evidenţiază creşterea monotonă explozivă a capitalului.

R0	1000
r	0,03
R1	1030
R2	1060,9
R3	1092,727
R4	1125,509
R5	1159,274
R6	1194,052
R7	1229,874
R8	1266,77
R9	1304,773
R10	1343,916
R11	1384,234
R12	1425,761
R13	1468,534
R14	1512,59
R15	1557,967



Studiu de caz. Capitalizarea unei sume de bani cu depozit suplimentar[1]

Un investitor face un depozit initial R_0 pe *t* luni care se va capitaliza la o rata lunară a dobânzii *r* si un depozit suplimentar de *a* unitãti monerare (carăuia nu i se aplică dobândă). Se pune problema determinării capitalului (plăţii totale) după t luni. **Caz numeric:**

- R_0 = 10000 (RON) – depozitul iniţial, la momentul zero;
- *r* =0,05 (5%) – rata lunară a dobânzii;
- *a* = 250 (RON) - depozitul suplimentar.

Cerinţe:

a) Care este ecuaţia cu diferenţe de ordinul *1* în R_t?

b) Rezolvaţi ecuaţia de la *a)* şi ajungeţi la traiectoria de evoluţie a variabilei capital (valoarea depozitului) in funcţie de capitalul iniţial, rata anuală a dobânzii şi de depozitul suplimentar.

c) Care este valoarea depozitului și dobânda totală după 5 luni?

Rezolvări:

a) Ecuaţia cu diferenţe de ordinul 1 ce trebuie rezolvată este:

$$R_t = R_{t-1} + rR_{t-1} + a = (1+r)R_{t-1} + a \qquad \text{sau}$$

$$R_t - (1+r)R_{t-1} = a \qquad (2.1)$$

b) Se observă că avem de rezolvat o ecuaţie neomogenă cu diferenţe de ordinul 1, termenul ecuaţiei ce înglobează acele variabile care afectează valoarea curentă a capitalului *R*, altele decât propria lui valoare întârziată fiind diferit de 0.

Soluţia ecuaţiei are componenta soluţiei ecuaţiei omogene si componenta soluţiei particulare, fiind de forma:

$$R_t = A\tau^t + R^* \qquad (2.2)$$

unde:

[1] Terminologia in limba engleza: withdrawal

- τ - reprezintă rădăcina ecuaţiei cu diferenţe
- A – reprezintă o constantă nenulă a cărei valoare se poate determina cu ajutorul valorii capitalului la momentul iniţial,
- R^* - reprezintă o soluţie particulară, soluţia de echilibru pentru care:

$$R^* = R_t = R_{t-1} \tag{2.3}$$

Din (2.1), (2.2) ⇒ $R^* - (1+r)R^* = a \Rightarrow R^* = -\frac{a}{r}$ (2.4)

Pentru componenta soluţiei ecuaţiei omogene, avem:

- rădăcina ecuaţiei caracteristice:

$$A\tau^t - (1+r)A\tau^{t-1} = 0$$

$$\Rightarrow A\tau^{t-1}(\tau - 1 - r) = 0 \qquad \Rightarrow \tau = 1 + r \tag{2.5}$$

- constanta *A*:

In (2.2) pentru t=0 ⇒ $R_0 = A\tau^0 + R^* \quad \Rightarrow A = R_0 - R^*$

Atunci soluţia ecuaţiei cu diferenţe devine:

$$R_t = A\tau^t + R^* = (R_0 + \frac{a}{r})\,(1+r)^t - \frac{a}{r} \tag{2.6}$$

Traiectoria de evoluţie a variabilei capital (valoarea depozitului) in funcţie de capitalul iniţial, rata lunară a dobânzii şi depozitul suplimentar este exprimată prin relaţia (2.6).

d) Valoarea depozitului după 5 luni va fi:

$R_5 = (10000 + \frac{250}{0{,}05})\,(1+0{,}05)^5 - \frac{250}{0{,}05} = 14144{,}2$ (RON)

Dobânda totală după 5 ani va fi diferența între valoarea capitalului după 5 ani și valoarea inițială a capitalului:

$D_5 = R_5 - R_0 = 14144{,}2 - 10000 = 4144{,}2$ (RON)

Studiu de caz. Modelul multiplicatorului Keynesian

Modelul multiplicatorului Keynesian este util pentru analiza traiectoriei venitului agregat la nivelul unei economii, traiectorie rezultată dintr-o ecuaţie cu diferenţe de ordinul 1. Modelul are în componenţă următoarele 2 ecuaţii:

$$Y_t = C_t + I + G \tag{1.1}$$

$$C_t = C_0 + cY_{t-1} \quad (1.2)$$

unde:

- Y_t– venitului agregat la nivelul unei economii la momentul *t*;

- Y_{t-1} – venitului agregat la nivelul unei economii la momentul anterior, *t-1*;
- C_t – consumul agregat la nivelul unei economii la momentul *t*;
- *I* – investiţiile (considerate constante);
- *G* - cheltuielile guvernamentale (considerate constante);
- C_0 – componenta de consum autonom;
- c – parametru al modelului, *0<c<1*, reprezintă înclinaţia marginală spre consum.

Relaţia *(1.1)* este ecuaţia de descompunere a venitului agregat pe componente: consum agregat, investiţii, cheltuieli guverenamentale.

Consumul agregat la momentul *t* are, conform relaţiei *(1.2)* o componentă autonomă şi o componentă ce depinde prin intermediul paramatrului *c* de venitul agregat de la momentul anterior Y_{t-1}. Consumatorilor le ia timp să îşi ajusteze modelul de consum la o modificare de venit. Astfel, consumul de la momentul *t* va fi influenţat de nivelul venitului din perioada anterioară, *t-1*.

Caz numeric:

- $Y_0 = 5000$ (mil RON) – venitul agregat la momentul zero;
- *I* =1000 (mil RON) – investiţiile;
- *G* = 800 (mil RON) - cheltuielile guvernamentale;
- C_0 = 100 (mil RON) – componenta de consum autonom;
- c = 0,7 – parametru din (0,1), înclinaţia marginală spre consum.

Cerinţe:

a) Ajungeţi la o ecuaţie cu diferenţe de ordinul *1* în Y_t.
b)
de echilibru Y^*. Calculaţi valoarea.
c) Aflaţi rădăcina ecuaţiei cu diferenţe şi interpretaţi. Aflaţi constanta *A*. Ajungeţi la soluţia generală a ecuaţiei de la a).
d) Calculaţi valorile Y_1 Y_2 Y_3 Y_4, , , Y .
e) Interpretaţi traiectoria de evoluţie a venitului agregat .

f) Cheltuielile guvernamentale scad la 600 (mil RON), iar înclinaţia marginală spre consumdevine 0.6. Recalculaţi şi interpretaţi evoluţia lui Y_t.

Y_t

g) Rezolvaţi studiul de caz în programul *Ms Excel (*calculaţi valorile Y_1 , Y_2, Y_3, Y_4.... $Y_{1\ 5}$, realizaţi un grafic cu traiectoria de evoluţie a lui Y_t, interpretaţi).

Rezolvări:

a) $Y_t = C_t + I + G$ (1.1)

$C_t = C_0 + cY_{t-1}$ (1.2) $\Rightarrow$ $Y_t = C_0 + cY_{t-1} + I + G$

$$Y_t = cY_{t-1} + C_0 + I + G \quad (1.3)$$

unde termenul g din forma generală a unei ecuaţii cu diferenţe de ordinul 1 va fi:

$$g = C_0 + I + G$$

Relaţia (1.3) este ecuaţia cu diferenţe de ordinul 1 în Y_t căutată.

b) Pentru aflarea componentei soluţie particulară, impunem condiţia ca venitul agregat să rămână acelaşi, $Y^* = Y_t = Y_{t-1}$. Înlocuim în (1.3) şi obţinem ecuaţia pentru venitul de echilibru:

$$Y^* = cY^* + C_0 + I + G$$

$\Rightarrow$ $Y^* = \frac{C_0+I+G}{1-c}$ (1.4)

Relaţia (1.4) este relaţia de calcul pentru soluţia particulară a ecuaţiei (1.3) (1

$Y^* = \frac{100+1000+80}{1-0,7} = 6333.3$ (mil RON)

Valoarea de echilibru a venitului agregat în economia considerată este 6333.3 (mil RON).

c) Partea omogenă a ecuaţiei (1.3) este:

$Y_t - cY_{t-1} = 0$, iar soluţia componentei omogene este de forma: $Y_t = A\tau^t$

$\Rightarrow A\tau^t - cA\tau^{t-1} = 0 \Rightarrow A\tau^{t-1}(\tau - c) = 0$

Cum A nenul, τ nenul $\Rightarrow \tau = c = 0,7$

Rădăcina ecuaţiei cu diferenţe a fost determinată, are valoarea 0,7 care este în intervalul (0,1). Deci ne aşteptăm la o traiectorie de tip monotonă amortizată, valorile variabilei de ieşire vor converge spre valoarea Y^*.

Soluţia ecuaţiei (1.3) este de forma:

$$Y_t = A\tau^t + Y^*$$

Pentru *t=0* $\Rightarrow Y_0 = Ac^0 + Y^* \Rightarrow A = Y_0 - Y^*$, unde Y_0 – venitul agregat la momentul zero, Y^*- venitul agregat de echilibru.

⇒ A = 5000 – 6333,3 = -1333,3 (constanta *A* este negativă)

Atunci evoluţia venitului analizat (traiectoria) se descrie prin următoarea ecuaţie:

$$Y_t = (Y_0 - Y^*)c^t + Y^* \qquad (1.5)$$

unde Y^* este dat de relaţia (1.4).

Relaţia (1.5) este relaţia de calcul pentru traiectoria de evoluţie a venitului.

$$\Rightarrow Y_t = -1333{,}3(0{,}7)^t + 6333{,}3 \qquad (1.6)$$

d) Din (1.6) ⇒

$Y_1 = -1333{,}3(0{,}7)^1 + 6333{,}3 = 5400$ (mil RON)
$Y_2 = -1333{,}3(0{,}7)^2 + 6333{,}3 = 5680$ (mil RON)
$Y_3 = -1333{,}3(0{,}7)^3 + 6333{,}3 = 5876$ (mil RON)
$Y_4 = -1333{,}3(0{,}7)^4 + 6333{,}3 = 6013$ (mil RON)

e) Se observă că valorile variabilei de ieşire cresc de la Y_0=5000 şi converg spre valoarea 6333,3. Traiectoria este de tip monotonă amortizată.

h) Cheltuielile guvernamentale scad la 600 (mil RON), iar înclinaţia marginală spre consum devine 0.6. Recalculaţi şi interpretaţi evoluţia lui Y_t.

Venitul de echilibru se modifică. Soluţia generală a ecuaţiei devine:

$$Y_t = 750 * (0{,}6)^t + 4250 \qquad (1.7)$$

Traiectoria continuă să fie de tip monotonă amortizată, valorile variabilei de ieşire converg spre noua valoare de echilibru, 4250 (mil RON).

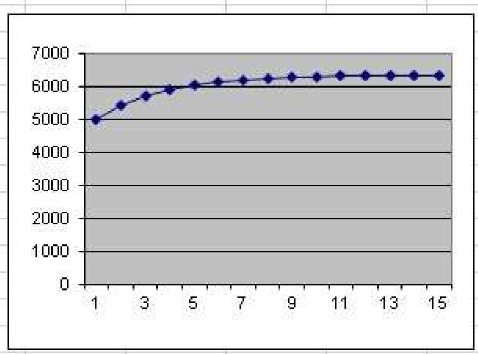
f) Aplicarea studiului de caz în programul *Ms Excel*

C0 - consumul autonom	100	

I – investitiile	1000	
G - ch. Guvernamentale	800	
c - param, inclinatia marginala spre consum	0,7	
Y* - venitul agregat de echilibru	6333,333	
Lamda - rădăcina ecuaţiei	0,7	
A - constanta nenula	-1333,33	
0	Y0	5000
1	Y1	5400
2	Y2	5680
3	Y3	5876
4	Y4	6013,2
5	Y5	6109,24
6	Y6	6176,468
7	Y7	6223,528
8	Y8	6256,469
9	Y9	6279,529
10	Y10	6295,67
11	Y11	6306,969
12	Y12	6314,878
13	Y13	6320,415
14	Y14	6324,29
15	Y15	6327,003

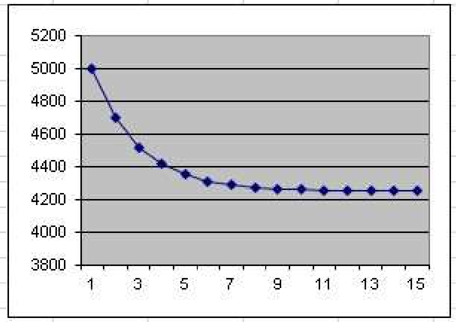
Graficul cu traiectoria de evoluţie a lui Y_t :

0	Y0	5000
1	Y1	5400
2	Y2	5680
3	Y3	5876
4	Y4	6013,2
5	Y5	6109,24
6	Y6	6176,468
7	Y7	6223,528
8	Y8	6256,469
9	Y9	6279,529
10	Y10	6295,67
11	Y11	6306,969
12	Y12	6314,878
13	Y13	6320,415
14	Y14	6324,29
15	Y15	6327,003



Scenariul de modificare a cheltuielilor guvernamentale şi a parametrului *c:*

	A	B	C
30	C0 - consumul autonom	100	
31	I - investitiile	1000	
32	*G - ch. Guvernamentale, se modifica fata de CAZ 1, scad cu 25%*	600	
33	*c - param, inclinatia marginala spre consum se modifica fata de CAZ 1 & CAZ 2, scade*	0,6	
34	Y* - venitul agregat de echilibru	4250	
35	0	Y0	5000
36	1	Y1	4700
37	2	Y2	4520
38	3	Y3	4412
39	4	Y4	4347,2
40	5	Y5	4308,32
41	6	Y6	4284,992
42	7	Y7	4270,995
43	8	Y8	4262,597
44	9	Y9	4257,558
45	10	Y10	4254,535
46	11	Y11	4252,721
47	12	Y12	4251,633
48	13	Y13	4250,98
49	14	Y14	4250,588



ECUAŢII CU DIFERENŢE DE ORDINUL 2

Forma generală a unei ecuaţii cu diferenţe de ordinul 2 este următoarea:

$$Y_t + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} = g$$

unde:

- t – timpul care a trecut de la începutul procesului dinamic pe care-l studiem;
- g – termenul ecuaţiei ce înglobează acele variabile care afectează valoarea curentă a lui Y, altele decât propriile valoari întârziate; termenul g poate fi o constantă sau o variabilă ce ia diferite valori în timp;
- β_1, β_2 - parametri ai ecuaţiei, $\beta_1, \beta_2 \in R$.

Valoarea pe care o ia variabila Y în perioada t depinde de valorile sale la momentele anterioare t-1, t-2 şi de o serie de alţi factori exprimaţi prin termenul g.

Pentru cazul $g \neq 0$ ecuaţia cu diferenţe de ordinul 2 este neomogenă, iar pentru cazul $g = 0$ ecuaţia este omogenă având forma:

$$Y_t + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} = 0$$

Soluţia ecuaţiei se compune, ca şi în cazul ecuaţiilor cu diferenţe de *ordinul 1*, din soluţia părţii omogene (caz $g = 0$) şi o soluţie particulară.

Soluţia ecuaţiei este de forma: $Y_t = A_1\tau_1^t + A_2\tau_2^t + Y^*$, unde:

- soluţia particulară este obţinută prin condiţia: $Y^* = Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2}$
- τ_1, τ_2 - reprezintă cele două rădăcini ale ecuaţiei caracteristice
- A_1, A_2 – reprezintă două constante nenule ale căreor valoare se determină din condiţiile iniţiale *(t=0 şi t=1)*.

Studiu de caz. Modelul multiplicator – accelerator

Modelul multiplicator – accelerator este util pentru analiza traiectoriei venitului agregat la nivelul unei economii, traiectorie rezultată dintr-o ecuaţie cu diferenţe de ordinul 2. Modelul are în componenţă următoarele 3 ecuaţii:

$$Y_t = C_t + I_t + G \qquad (3.1)$$

$$C_t = C_0 + cY_t \qquad (3.2)$$

$$I_t = I_0 + v(C_{t-1} - C_{t-2}) \qquad (3.3)$$

unde:

- Y_t – venitului agregat la nivelul unei economii la momentul *t*;
- C_t – consumul agregat la nivelul unei economii la momentul *t*;
- C_0 – componenta de consum autonom;
- C_{t-1} – consumul agregat la nivelul unei economii la momentul *t-1*;
- C_{t-2} – consumul agregat la nivelul unei economii la momentul *t-2*;
- I_t – investiţiile la momentul *t*;
- I_0 – componenta de investiţii autonomă;
- G - cheltuielile guvernamentale (considerate constante);
- *c, v* – parametri ai modelului; *c* reprezintă înclinaţia marginală spre consum, $0<c<1$; $v \in R$.

Relaţia *(3.1)* este ecuaţia de descompunere a venitului agregat pe componente: consum agregat, investiţii, cheltuieli guverenamentale.

Consumul agregat la momentul *t* are, conform relaţiei *(3.2)* o componentă autonomă şi o componentă ce depinde prin intermediul paramatrului *c* de venitul agregat Y_t.

Relaţia *(3.3):* investiţiile la momentul *t* au o componentă autonomă şi o componentă ce depinde cu un decalaj de o perioadă de modificarea consumului faţă de perioada anterioară.

Ajungerea la o ecuaţie cu diferenţe de ordinul *2* în Y_t şi soluţionarea acesteia se realizează astfel.

$$C_t = C_0 + cY_t \qquad (3.2)$$
$$I_t = I_0 + v(C_{t-1} - C_{t-2}) \qquad (3.3) \quad \Rightarrow$$

$$I_t = I_0 + v(C_0 + cY_{t-1} - C_0 - cY_{t-2}) \quad \Rightarrow \quad (3.1), (3.2) \quad \Rightarrow$$

$$Y_t = C_t + I_t + G = C_0 + cY_t + I_0 + v(cY_{t-1} - cY_{t-2}) + G$$

$$\Rightarrow Y_t(1-c) - cvY_{t-1} + cvY_{t-2} = C_0 + G + I_0$$

$$\Rightarrow \; Y_t - \frac{cv}{1-c}Y_{t-1} + \frac{cv}{1-c}Y_{t-2} = \frac{C_0+I_0+G}{1-c} \qquad (3.4)$$

unde termenul g din forma generală a unei ecuaţii cu diferenţe de ordinul *2* va fi:

$$g = \frac{C_0+I_0+G}{1-c}$$

Relaţia *(3.4)* este ecuaţia cu diferenţe de ordinul *2* în Y_t căutată.

Soluția ecuației *(3.4)* are cele două componente: componenta soluției particulare şi componenta soluţiei părții omogene:

$$Y_t = Y^* + A_1\tau_1^t + A_2\tau_2^t \, .$$

Soluţia particulară, Y^*, în acest studiu de caz reprezintă venitul agregat de echilibru în economia analizată. Pentru aflarea aesteia, impunem condiţia ca venitul agregat să rămână acelaşi în perioadele de timp *t, t-1, t-2*: $Y^* = Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2}$. Înlocuim în *(3.4)* şi obţinem ecuaţia pentru vevnitul de echilibru:

$$Y^* - \frac{cv}{1-c}Y^* + \frac{cv}{1-c}Y^* = \frac{C_0 + I_0 + G}{1-c}$$

$$\Rightarrow \; Y^* = \frac{C_0+I_0+G}{1-c} \qquad (3.5)$$

Relaţia (3.5) este relaţia de calcul pentru soluţia particulară a ecuaţiei *(3.4).*

Partea omogenă a ecuaţiei *(3.4)* este:

$$Y_t - \frac{cv}{1-c} Y_{t-1} + \frac{cv}{1-c} Y_{t-2} = 0$$

iar soluţia ecuației omogene este de forma:

$$Y_t = A\tau^t,$$

unde:

- τ - reprezintă rădăcina ecuaţiei cu diferenţe;
- A – reprezintă o constantă nenulă a cărei valoare se poate determina din informaţiile date, cu ajutorul valorilor variabilei de ieşire Y_0, Y_1

$$\Rightarrow A\,\tau^t - \frac{cv}{1-c} A\,\tau^{t-1} + \frac{cv}{1-c} A\,\tau^{t-2} = 0$$

$$\Rightarrow A\,\tau^{t-2}\left(\tau^2 - \frac{cv}{1-c}\,\tau + \frac{cv}{1-c}\right) = 0$$

Cum *A* nenul, τ nenul $\Rightarrow \tau_{1,2} = \dfrac{c\,v \pm \sqrt{c^2v^2 - 4(1-c)c\,v}}{2(1-c)}$

$$\Rightarrow \tau_{1,2} = \frac{\frac{cv}{1-c} \pm \sqrt{\frac{c^2v^2}{(1-c)^2} - 4\frac{cv}{1-c}}}{2} \Rightarrow \tau_{1,2} = \frac{cv \pm \sqrt{c^2v^2 - 4\,cv\,(1-c)}}{2\,(1-c)} \qquad (3.6)$$

Atunci soluţia părţii omogene va fi o combinaţie a celor două rădăcini caracterisitice

$$Y_t^{Omg} = A_1\tau_1^t + A_2\tau_2^t$$

Soluţia ecuaţiei *(3.4)* va fi de forma:

$$Y_t = Y_t^{Omg} + Y^* \quad \Rightarrow \quad Y_t = A_1\tau_1^t + A_2\tau_2^t + Y^* \qquad (3.7)$$

Pentru *t=0* în *(3.7)* $\Rightarrow Y_0 = A_1\tau_1^0 + A_2\tau_2^0 + Y^* \quad \Rightarrow Y_0 = A_1 + A_2 + Y^*$ (3.8)

unde Y_0 – venitul agregat la momentul zero, Y* - venitul agregat de echilibru.

Pentru *t*= 1 în *(3.7)* $\Rightarrow Y_1 = A_1\tau_1^1 + A_2\tau_2^1 + Y^* \quad \Rightarrow Y_1 = A_1\tau_1 + A_2\tau_2 + Y^*$ (3.9)

Din *(3.8), (3.9)*

$$A_1 = \frac{\tau_2(Y_0 - Y^*) - (Y_1 - Y^*)}{\tau_2 - \tau_1} \qquad (3.10)$$

$$A_2 = \frac{-\tau_1(Y_0 - Y^*) + (Y_1 - Y^*)}{\tau_2 - \tau_1} \qquad (3.11)$$

Atunci evoluţia venitului analizat se descrie prin următoarea ecuaţie:

$$Y_t = \frac{\tau_2(Y_0 - Y^*) - (Y_1 - Y^*)}{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1}^t + \frac{-\tau_1(Y_0 - Y^*) + (Y_1 - Y^*)}{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2}^t + Y^* \qquad (3.12)$$

unde Y* este dat de relaţia *(3.5)*: $Y^* = \frac{C_0 + G + I_0}{1 - c}$.

Relaţia *(3.12)* descrie soluţia căutată a ecuaţiei *(3.4)*.